فصلنامهٔ اقتصاد و الگوسازی
دانشگاه شهید بهشتی، تابستان ۱۳۹۷

Quarterly Journal of Economics and Modelling
Shahid Beheshti University

تحلیل آگزیوماتیک نرخ بهره بهینه در الگوهای بیولی

سیدعقیل حسینی*، محمد واعظ برزانی، رسول بخشی دستجردی***، افشین پرورده****‏**

تاریخ دریافت	تاریخ پذیرش
۱۳۹۷/۰۶/۰۴	۱۳۹۷/۰۷/۱۷

چکیده

این مطالعه به این مسئله می‌پردازد که در فضایی که بر «تقاضای احتیاطی» برای نگهداری پول و دارایی تمرکز شود، چه نرخ بهره‌ای «وجود» و همچنین «بهینگی» تعادل پولی را تضمین خواهد نمود. فضای مورد تحلیل در این مقاله دارای دو ویژگی اساسی است: «عوامل ناهمگن» که با ریسک‌های منحصر به فرد مواجه هستند؛ و «بازارهای ناقص» که در آنها امکان بیمه کامل در برابر این ریسک‌ها از طریق وام‌گیری وجود ندارد. در چنین فضایی افراد برای «بیمه شخصی» خویش در برابر نوسانات درآمدی «مختص به شخص» اقدام به پس‌انداز احتیاطی از طریق انباشت یک دارایی منحصربفرد از قبیل پول دستوری، اعتبار و یا سرمایه می‌نمایند که اصطلاحاً «الگوهای بیولی» نامیده می‌شوند. در این مقاله با روش آگزیوماتیک اثبات شده است که در حالت وجود همزمان دو دارایی یعنی پول دستوری و اوراق قرضه نیز همچنان نتایج اصلی الگوهای بیولی صادق است؛ یعنی ضرورت دارد نرخ بهره به کمتر از نرخ رجحان زمانی کاهش یابد تا مصرف و دارایی همگرا شوند و تعادل پولی محقق شود.

کلید واژه‌ها: *نرخ بهره، تعادل پولی، بهینگی، پس‌انداز احتیاطی، الگوهای بیولی.*
طبقه‌بندی JEL: *E21، E43، E51.*

* استادیار گروه اقتصاد دانشکده علوم انسانی دانشگاه یاسوج — aqil.hoseiny@yu.ac.ir
** دانشیار گروه اقتصاد دانشکده علوم اداری و اقتصاد دانشگاه اصفهان — vaez@polt.ui.ac.ir
*** دانشیار گروه اقتصاد دانشکده علوم اداری و اقتصاد دانشگاه اصفهان — r.bakhshi@ase.ui.ac.ir
**** دانشیار گروه آمار دانشکده علوم دانشگاه اصفهان — a.parvardeh@sci.ui.ac.ir

۱. مقدمه

انگیزه‌های مختلفی برای نگهداری پول و دارایی وجود دارد. در این مقاله به این پرسش پرداخته شده است که در فضایی که بر «انگیزه‌های احتیاطی» برای نگهداری پول و دارایی تمرکز شود، چه نرخ بهره‌ای «وجود»[۱] تعادل پولی را تضمین خواهد نمود و همچنین «بهینگی»[۲] این تعادل را تضمین خواهد نمود؟ قبل از پرداختن به پاسخ، ضرورت دارد مقدمتاً چند مفهوم اساسی و همچنین فضای مورد بحث روشن شود. فضای مورد تحلیل در این مقاله دارای دو ویژگی اساسی است: «عوامل ناهمگن»[۳] و «بازارهای ناقص»[۴]. فرض می‌شود که دارایی اولیه عوامل اقتصادی در معرض شوک‌های تصادفی «مختص به شخص» قرار دارد و از این رو فرآیند تحقق درآمد و انباشت ثروت عوامل و نهایتاً رفتار مصرفی عوامل متفاوت خواهد بود. منظور از «ریسک مختص به شخص»[۵] ریسکی است که توزیع کل دارایی را متأثر نمی‌سازد و فقط منجر به جابجایی افراد درون توزیع دارایی می‌شود. بدین ترتیب عوامل اقتصادی از حیث فرآیند درآمدی و مصرفی «ناهمگن» هستند؛ در تقابل با الگوهای «عامل نماینده»[۶] که همه افراد فرآیند تحقق درآمد و نهایتاً مصرف یکسانی را تجربه می‌کنند و اصطلاحاً «همگن»[۷] هستند. از سوی دیگر این مقاله در فضای «فرضیه درآمد دائمی»[۸] فریدمن قرار دارد. «مطلوبیت نهایی پول» روی مسیر بهینه باید برای عوامل اقتصادی ثابت بماند. این مسئله مستلزم هموار نمودن مسیر مصرف است. اما از آنجا که در الگوی مورد تحلیل در این مقاله افراد مواجه با نوسانات درآمدی

---

۱ Existence
۲ Optimality
۳ Heterogenous Agents
۴ Incomplete Markets
۵ Idiosyncratic Risk
۶ Representative Agent
۷ Homogenous Agents
۸ Permanent Income Hypothesis

هستند، بنابراین برای هموار نگه داشتن مسیر مصرفی خویش ناچارند از «بازارهای بیمه»[۱] استفاده نمایند. در فضای بازارهای کامل و اصطلاحاً الگوهای «ارو-دبرویی»[۲] و یا «دبرویی» که دسترسی کامل به «بازارهای بیمه» و از جمله بازارهای «وام‌دهی و وام‌گیری»[۳] را برای خانوارها فراهم می‌آورند، افراد از طریق «بیمه بیرونی» به صورت کامل خود را در برابر این ریسک‌های درآمدی بیمه می‌نمایند. به عنوان نمونه در فضای «دبرویی» خانوارها مجازند ریسک درآمدی خود را از طریق مبادله «دعاوی مشروط یک-دوره‌ای»[۴] در بازار اوراق قرضه به صورت کامل پوشش دهند (دبرو، ۱۹۵۹). اما در الگوهای «بازارهای ناقص»، فرض شده است که بازارهای وام و بیمه وجود ندارند. بدین ترتیب تنها گزینه پیش روی افراد برای مقابله با نوسانات درآمدی، «بیمه شخصی»[۵] خویش از طریق نگهداری یک دارایی بدون‌ریسک از قبیل سرمایه، پول دستوری و یا اعتبار (مشتمل بر پول درونی، اوراق قرضه دولتی، اسناد بدهکاری (IOU's)، سپرده‌های بانکی و ...) است. به این دارایی‌های انباشته شده در این الگو که با «انگیزه‌های احتیاطی» صورت می‌پذیرد، «پس‌انداز احتیاطی»[۶] می‌گویند و این الگوها را «الگوهای بیولی»[۷] می‌نامند.

این مقاله به دنبال طراحی الگویی است که دو نوع دارایی پیش روی فرد برای بیمه شخصی وجود دارد: پول دستوری و اعتبار (به صورت خاص اوراق قرضه). مسئله اصلی در این مقاله این است که اگر یک دارایی دارای نرخ بهره بدون ریسک (از قبیل اوراق قرضه) وارد الگوی پول دستوری[۸] شود، نتایج چه تغییری خواهد نمود؟ به بیان دقیق‌تر چه نرخ

---

۱ Insurance Markets

۲ Arrow-Debreu Models

۳ Lending-Borrowing

۴ One Period Contingent Claims

۵ Self-insurance

۶ Precautionary Savings

۷ Bewley Models

۸ Fiat money

بهره‌ای در این فضا «وجود» تعادل پولی را تضمین می‌کند و همچنین تعادل پولی شکل‌گرفته در این حالت متناظر با چه توزیع دارایی و مصرفی خواهد بود؟

در قسمت دوم این مقاله به اختصار به مطالعات انجام‌شده در حوزه الگوهای بیولی پرداخته خواهد شد. در قسمت سوم الگو صورت‌بندی خواهد شد. سپس در چارچوبی آگزیوماتیک[۱] نشان داده می‌شود که حتی در فضای با وجود دو دارایی نیز همچنان نتایجی از قبیل ضرورت کاهش نرخ بهره و کمتر بودن آن از نرخ رجحان زمانی برای همگراشدن مصرف و دارایی و اثبات وجود تعادل پولی صادق است. به دلیل وجود «وابستگی به سوابق»[۲] در الگوهای بیولی، بکارگیری «روش‌های بازگشتی»[۳] در آن‌هاکارآمد است. به همین دلیل در این مقاله از روش‌های بازگشتی بهره گرفته می‌شود. در مسائل بازگشتی، تصمیم‌گیرنده بایستی دنباله‌ای از تصمیمات بهینه را در طول زمان اتخاذ نماید (لوکاس، پرسکات و استاکی، ۱۹۸۹). در قسمت چهارم نتیجه‌گیری بحث ارائه خواهد شد. در قسمت پنجم پیشنهادات سیاستی مقاله ارائه خواهد شد. سه قضیه اصلی مقاله در قسمت ضمایم اثبات شده است.

۲. مبانی نظری و پیشینه تحقیق

ناممکن به نظر می‌رسد که بتوان ایده «مقدار بهینه پول» که اساس الگوهای بیولی است را به یک نویسنده خاص منتسب نمود. این ایده مدت‌ها در فضای اقتصاد پولی وجود داشت. فریدمن[۴] (۱۹۵۳، ۲۵۱-۲۶۲) این واقعیت را تشریح نمود که تورم مصرف‌کنندگان را به سمت صرفه‌جویی در مانده‌های نقدی غیرضروری خویش سوق می‌دهد. این ایده

---

۱. مقصود از «روش آگزیوماتیک» (Axiomatic Method) روشی است که ابتدا آگزیوم‌ها (یا فروض مبنایی) هر الگو به صورت «دقیق»، «کامل» و «سازگار» تصریح می‌شوند و سپس قضایای مورد نظر بر مبنای این آگزیوم‌ها صورت‌بندی و با روش ریاضی و استنتاجی اثبات می‌شوند.

۲. History Dependence

۳. Recursive Methods

۴. Milton Friedman

توسط بیلی[1] (۱۹۵۶) صورت‌بندی شد. متعاقباً این ایده بوسیله کیگان[2] (۱۹۵۸) آزمون تجربی شد. ساموئلسن (۱۹۶۳، ۱۹۶۸، ۱۹۶۹) و توبین (۱۹۶۵) استدلال کردند که از نقطه نظر کارآیی، عوامل اقتصادی بایستی از مانده‌های نقدی اشباع شوند. این ایده در ادامه بوسیله فریدمن در مقاله جریان‌ساز «مقدار بهینه پول» در سال ۱۹۶۹ تبیین شد. یکی از اصلی‌ترین دست‌آوردها در اقتصاد پولی، نظریه «مقدار بهینه پول» میلتون فریدمن (۱۹۶۹) بوده است. به تعبیر وودفرد (۱۹۹۰) این نظریه مشهورترین گزاره در حوزه نظریه پولی محض است. میلتون فریدمن در فضای ترسیمی خویش اثبات نمود که نرخ‌های بهره اسمی بهینه برابر صفر است. فریدمن در این مقاله نشان داد شرط لازم برای دستیابی به وضعیت بهینه اجتماعی در یک اقتصاد پولی این است که هزینه خصوصی نگهداری پول برابر هزینه اجتماعی آن (یا همان هزینه چاپ پول کاغذی که تقریباً صفر است) شود و این امر مستلزم آن است که نرخ بهره اسمی برابر صفر شود. نتیجتاً در این فضا نرخ بهره واقعی برابر منفی نرخ رجحان زمانی می‌شود. نظریه فریدمن در باب «مقدار بهینه پول» منتج به «قاعده فریدمن»[3] یا «قاعده شیکاگو»[4] گردید که منجر به حذف بازار وام (بازار قرض‌دهی و قرض‌گیری) می‌شود، زیرا هنگامی که نرخ بهره اسمی صفر باشد نرخ بازده روی پول و اوراق قرضه برابر می‌شود و نتیجتاً افراد راغب به نگهداری پول نقد که دارای مزیت نقدینگی است می‌شوند و تقاضا برای اوراق قرضه صفر می‌شود. در چارچوب قاعده فریدمن، نرخ‌های بهره اسمی مثبت بدلیل آنکه مصرف‌کنندگان را مجبور به صرفه‌جویی در استفاده از وجوه نقد می‌کند منجر به ناکارآیی می‌شود و جهت دستیابی به کارآیی و بهینگی لازم است نرخ بهره اسمی، صفر باشد.

۱. Baily
۲. Cagan
۳. Friedman Rule
۴. Chicago Rule

متعاقب مقاله فریدمن، طیف گسترده‌ای از ادبیات در حوزه اقتصاد پولی شکل گرفت که به مطالعه در باب مقدار بهینه پول و رشد بهینه پول پرداختند.[۱] کوچرلاکوتا و کول (۱۹۹۸) با ارائه یک الگوی رشد نئوکلاسیکی استاندارد یک‌بخشی که در آن پول از طریق یک قید پیشا- نقد[۲] وارد می‌شود اثبات نمودند که نرخ بهره اسمی صفر نه تنها «شرط لازم» برای تخصیص بهینه منابع بلکه «شرط کافی» نیز است. آیرلند (۲۰۰۳) نشان داد که در کوتاه‌مدت یعنی هنگامی که شروط بلندمدت لازم برای تعادل پولی وجود ندارد، همچنان می‌توان قاعده‌ی فریدمن را اعمال نمود: در این حالت بانک مرکزی می‌تواند عرضه پول را به شیوه‌ای انتخاب نماید که وجود یک تعادل با نرخ بهره‌ی اسمی صفر و تخصیص‌های کارا برای تمامی ادوار را تضمین کند.

یک دسته از الگوهایی که در فضای قاعده فریدمن طراحی شدند الگوهای بیولی هستند. دو مقاله پایه‌ای بیولی (۱۹۸۰؛ ۱۹۸۳) پی‌ریزی کننده این دسته از نظریه‌ها بود. بیولی به دنبال ارائه تحلیل دقیق و آگزیوماتیک از مقاله «مقدار بهینه پول» فریدمن (۱۹۶۹) بود. وی از یک الگوی نظری «تعادل عمومی» جهت تبیین الگوی فریدمن استفاده نمود. از دیدگاه بیولی، الگوی فریدمن یک الگوی دقیق تعادل رقابتی است و می‌تواند به عنوان بدیلی برای الگوی ارو- دبرو مطرح شود. «مقدار بهینه پول» طبیعتاً به یک الگوی تعادلی منجر می‌شود که در آن تعادل پولی یک «دنباله مانا از تعادل‌های موقتی» است. این تعادل «بهینه پارتو» است. چنین تعادلی حتی با وجود فقدان مبادلات آتی و عدم وجود بازاری برای قراردادهای دعاوی مشروط[۳] (یعنی ناقص بودن بازار و عدم وجود بازارهای ارو-دبرویی و اروپی) بازهم بهینه پارتو است. بیولی در مقاله ۱۹۸۰ این ادعا را طرح کرد که تعادل برای تمامی نرخ‌های بهره‌ی کمتر از نرخ رجحان زمانی وجود دارد و

---

۱. دسته‌ی دیگری از الگوهای حوزه اقتصاد پولی با توجه به آثار و تبعات نرخ بهره پولی مثبت بر اقتصاد (از قبیل بیکاری، تورم، بحران‌زایی و ...) مقدار بهینه نرخ بهره را استخراج می‌کنند (داودی و هادیان، ۱۳۹۰).

۲. Cash-in-Advance

۳. Contingent Claims Contracts

این حدس را مطرح نمود که این تعادل‌ها می‌توانند به دلخواه از طریق نزدیک نمودن کافی نرخ بهره به نرخ خالص رجحان زمانی، به اندازه کافی به بهینگی پارتویی نزدیک شوند و این حدس را به نحوی تفسیر نمود که مؤید نظریه فریدمن بود. بیولی سه سال بعد در مقاله (۱۹۸۳) خود اذعان نمود که این حدس اشتباه بوده است و قضیه وجود تعادل وی در مقاله قبلی نادرست بوده است. در صورتی که نرخ بهره به نرخ رجحان زمانی بیش از حد نزدیک گردد، تعادل نمی‌تواند وجود داشته باشد: «در این مقاله من قضیه وجود تعادل خویش را اصلاح می‌کنم و اثبات می‌کنم که تعادل پولی در صورتی می‌تواند وجود داشته باشد که **نرخ بهره به اندازه کافی نزدیک به صفر باشد**» (بیولی، ۱۹۸۳، ۱۴۸۵). این نظریه وجود تعادل، همچنین مستلزم این بود که نرخ رجحان زمانی هر مصرف‌کننده به اندازه کافی به صفر نزدیک باشد و درآمد غیر بهره‌ای وی مثبت باشد (از پایین نسبت به صفر کراندار باشد).

متعاقب مقالات بیولی، دسته‌ای از مطالعات در حوزه «پس‌انداز احتیاطی» شکل گرفت که وجه تمایز آنها استفاده از دارایی بدون ریسک منحصربفرد جهت «بیمه شخصی» خویش یعنی ثبات مصرف خود در برابر شوک‌های مغایر بود. این دارایی منحصربفرد که در الگوی بیولی (۱۹۸۰ و ۱۹۸۳) پول دستوری بود، در الگوی آیاگاری[۱] (۱۹۹۴) «سرمایه فیزیکی» و در الگوی هوگت (۱۹۹۲) اعتبار از قبیل اوراق قرضه یا اسناد بدهکاری (IOUs) بود.

مسئله اصلی الگوهای بیولی این است که چه نرخ بهره‌ای «تعادل پولی» را تضمین می‌نماید؟ مقصود از «تعادل پولی» تعادلی است که در آن قیمت‌ها همواره مثبت می‌مانند و «پول دستوری» که فاقد ارزش ذاتی است، دارای ارزش مثبت و ثابتی می‌شود. منظور از تضمین «وجود تعادل پولی» پی‌ریزی شرایطی است که تضمین نماید ارزش پول دستوری مثبت می‌ماند. در این الگوها از طریق ایجاد تقاضای احتیاطی برای پول، ارزش

---

۱. Aiyagari

پول مثبت می‌شود. در فضای الگوهای بیولی قاعده فریدمن «وجود تعادل پولی» را تضمین نمی‌نماید و نتیجه کلیدی در الگوهای بیولی همین وجه تفارق آنها با قاعده فریدمن است. اگر نرخ بهره برابر نرخ رجحان زمانی باشد، از آنجا که دیگر هزینه فرصتی برای نگهداری دارایی وجود ندارد بنابراین افراد مایل به نگهداری مقدار نامحدودی دارایی با هدف «بیمه شخصی» خواهند بود. از آنجا که عرضه دارایی، محدود است این مسئله منجر به وجود مازاد تقاضای دائمی برای دارایی می‌شود و بنابراین تعادل پولی نمی‌تواند «وجود» داشته باشد. نشان داده می‌شود که در صورت برقراری قاعده فریدمن، دارایی و متعاقباً مصرف به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و همچنین قیمت‌ها صفر خواهد شد. انباشت بیش‌ازحد دارایی در صورت اعمال قاعده فریدمن یکی از ویژگی‌های مشترک الگوهای بیولی است. به همین دلیل در الگوهای بیولی، برای تضمین «وجود» تعادل پولی نرخ بهره را کاهش می‌دهند ($r < \rho$). وجه اشتراک الگوهای بیولی همین کمتر بودن نرخ بهره نسبت به نرخ رجحان زمانی است. از این رو این الگوها با کاهش نرخ بهره شرایط را به نحوی فراهم می‌آورند که منجر به همگرا شدن این توزیع‌های مقطعی می‌شوند. بدین ترتیب با کاهش نرخ بهره، توزیع‌های مقطعی مصرف، ثروت، و درآمد در طول زمان ثابت می‌مانند، و توزیع‌های مانای مجانبی مصرف، ثروت، و درآمد برای یک مصرف‌کننده منفرد در طول زمان برابر توزیع‌های مقطعی متناظر در بین افراد می‌شود. به عبارت دیگر الگوهای بیولی، نرخ بهره را به اندازه کافی کاهش می‌دهند تا دارایی‌ها به سمت یک توزیع همگرا شوند به قسمی که میانگین مقطعی آن توزیع، بازار دارایی غیرریسکی را تسویه نماید. در واقع الگوهای بیولی نرخ بهره را به اندازه کافی پایین می‌آورند تا نیروی پس‌اندازهای احتیاطی را که هنگامی که $\beta(1 + r) = 1$ بود دارایی‌ها را در مسئله پس‌انداز به سمت بی‌نهایت سوق می‌داد خنثی نماید (سارجنت و لیونگ‌ویست، ۲۰۱۳).

این مقاله وضعیتی را مورد تحلیل قرار می‌دهد که از دو دارایی یعنی پول بدون‌پشتوانه در کنار اوراق قرضه جهت بیمه شخصی استفاده شود. این وضعیت در مطالعات اقتصادی

چندان مورد توجه قرار نگرفته است. در اینجا برخی از مطالعات نزدیک به مسئله مورد نظر در ادبیات اقتصاد پولی مورد اشاره قرار می‌گیرند. تانزند (۱۹۸۰) الگویی را طراحی نمود که در آن بازار وام خصوصی در کنار پول دستوری وجود داشته باشد. وی از طریق ناهمگنی مکانی[۱] عوامل، امکان شکل‌گیری بازارهای وام خصوصی (IOU) به صورت محدود و محلی را فراهم آورد. در این الگو به دلیل فاصله مکانی عوامل، بازار اعتبار تنها به صورت «محلی» و نه «فراگیر» قابل شکل‌گیری است. چمبرلین و ویلسون (۲۰۰۰، ۳۸۸) در حالت وجود چند دارایی نشان داده‌اند که مادامی که مصرف‌کننده قادر به انتخاب دنباله‌ای از نرخ‌های بهره «نهایی» است که در بلندمدت بالاتر از نرخ تنزیل هستند، مصرف به سمت بی‌نهایت میل خواهد نمود. کراسل و اسمیت (۱۹۹۸) الگوی آیاگری (۱۹۹۴) را با افزودن یک متغیر حالت کل z که یک شوک تکنولوژی است که از فرآیند مارکف تبعیت می‌کند اصلاح نمودند.

۳. الگو

در این الگو فرض می‌شود که عوامل مواجه با ریسک‌های «مختص به شخص» هستند و نتیجتاً دارای انگیزه نگهداری پس‌انداز احتیاطی هستند. در این الگو پیوستاری از N مصرف‌کننده ابتدائاً «همسان»[۲] ولی در نهایت «ناهمگن»[۳] وجود دارند که دارای یک توزیع کل دارایی ثابت هستند (گرچه درون این توزیع وضعیت افراد در حال تغییر است). همچنین این الگو در فضای «بازارهای ناقص» قرار دارد، یعنی از طریق فرض، بازارهای بیمه و وام حذف و یا محدود شده‌اند. از این رو افراد ناچارند برای مقابله با نوسانات درآمدی اقدام به بیمه شخصی خویش نمایند. برای بیمه شخصی خویش در برابر این ریسک‌ها، برخلاف الگوهای متداول بیولی، دو نوع دارایی در این الگو تعبیه شده است: پول دستوری،

۱. Heterogeneity of Locations
۲ Ex-ante Identical
۳ Ex-post Different

و اوراق قرضه دولتی دارای نرخ بهره بدون ریسک. منظور از پول دستوری، یک پول غیرقابل‌تبدیل است که به مقدار اسمی ثابتی توسط دولت به عنوان یک نهاد خارج از الگو عرضه می‌شود. افراد می‌توانند این پول را نگهداری نمایند، اما نمی‌توانند آن را چاپ کنند و یا انتشار دهند. دنباله مقادیر مصرفی و پول و اوراق قرضه نگهداری‌شده توسط عامل اقتصادی نماینده به صورت $\{c_t.m_t.b_t\}_{t=0}^{\infty}$ نمایش داده می‌شود. تابع مطلوبیت مصرف‌کننده به صورت زیر است:

$$U = E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \tag{1}$$

$\beta \in (0.1)$ عامل تنزیل بوده و برابر $\beta = \frac{1}{1+\rho}$ است که ρ نرخ رجحان زمانی است. فرض می‌شود که $\beta(1+r) < 1$. فرض می‌شود که u پیوسته، تا دو مرتبه مشتق‌پذیر، فزاینده و أکیداً مقعر است و $\lim u'(c) = \infty$.

از آنجا که الگوی پایه این مقاله، الگوی بیولی است در این قسمت ابتدا صورت‌بندی جدیدی از « الگوی مبنایی بیولی با وجود پول دستوری» ارائه می‌شود و سپس «اعتبار» را وارد الگو نموده و اثرات حاصل از درنظر گرفتن این دو دارایی در یک الگو پس‌انداز احتیاطی استنتاج شده و مورد تحلیل قرار خواهند گرفت.

در صورت‌بندی الگوی بیولی دولت از پرداخت آشکار بهره امتناع می‌ورزد ولی از طریق تغییر موجودی پول در گردش، یک پرداخت بهره‌ای ضمنی از طریق کاهش قیمت‌ها (تورم منفی) می‌پردازد. می‌توان تعادل پولی با نرخ بهره مثبت r را معادل یک تعادل با تورم منفی[1] تعریف نمود که در آن دیگر پرداخت بهره‌ای وجود ندارد. برای این کار می‌توان مالیات‌ها و قیمت‌ها را با نرخ r کاهش داد. پرداخت بهره‌ای ضمنی از طریق وضع $r_m = 0$ و $\tau_t = -g_t T_t$ محقق قیمت‌ها، که g نرخ رشد عرضه پول است، r_m نرخ بهره روی پول است، T_t برون‌زا بوده و پرداخت انتقالی واقعی و یا مالیات *سرانه* دولت برای هر یک از افراد است. بنابراین می‌توان چنین گفت که دولت در هر دوره به تناسب مانده‌های

۱ Deflationary Equilibrium

واقعی پرداختی در دوره قبل، با نرخ g پرداخت انتقالی جدیدی به هر یک از افراد انجام می‌دهد. بر این اساس، قید بودجه دولت بدین صورت خواهد بود:

$$T_t = T_{t+1}(1+g_t) \tag{۲}$$

قید بودجه خانوار در این حالت در قالب مقادیر اسمی به صورت زیر خواهد بود:

$$p_t c_t + M_t \le p_t w_t s_t + M_{t-1} + g_t p_t T_t \tag{۳}$$

در صورتی که این قید در قالب مقادیر واقعی ارائه شود چنین خواهیم داشت:

$$c_t + \frac{M_t}{p_t} \le w s_t + \frac{M_{t-1}}{p_t} + g_t T_t$$

با درنظر گرفتن $m_t = \frac{M_t}{p_t}$ و $m_{t-1} = \frac{M_{t-1}}{p_{t-1}}$ و همچنین تعریف $r_t = \frac{p_{t-1}}{p_t} - 1$ به عنوان «نرخ بهره ضمنی روی پول» نتیجه خواهد شد:

$$\frac{M_{t-1}}{p_t} = \frac{M_{t-1}}{p_{t-1}} \frac{p_{t-1}}{p_t} = m(1+r_t)$$

بنابراین قید بودجه دولت بر حسب مقادیر واقعی به صورت زیر خواهد بود:

$$c_t + m_t \le w s_t + (1+r_t) m_{t-1} + g_t T_t \tag{۴}$$

در «وضعیت پایا»[۱] مانده‌های واقعی ثابت می‌ماند و معکوس نرخ تورم ناخالص برابر $\frac{p_{t-1}}{p_t} = (1+r)$ می‌شود. بنابراین در وضعیت پایا این نتیجه به دست می‌آید: $(1+r) = (1+g)^{-1}$. یعنی «نرخ بهره ضمنی روی پول» برابر منفی «نرخ رشد پول» (g) است ($r = -g$).[۲] بنابراین نرخ مالیات یکجای ضمنی برابر خواهد بود با: $\tau = -gT_t = rT_t$. نتیجتاً قید بودجه خانوار در وضعیت پایا به صورت زیر خواهد بود:

$$c_t + m_t \le w s_t + (1+r) m_{t-1} + g T_t$$

۱ Steady State

۲. $(1+r_t)(1+g_t) = 1 \Rightarrow 1 + r + g + rg = 1 \Rightarrow r \approx -g$ (عبارت rg به دلیل ناچیز بودن کنار گذاشته می‌شود).

در الگوهای پس‌انداز احتیاطی فرض می‌شود که قرض‌گیری مواجه با قید است. فرض می‌کنیم قید قرض‌گیری برابر مقدار ϕ است. اگر مقدار پرداخت انتقالی یکجا را برابر قید قرض‌گیری قرار دهیم ($T_t = \phi$)، تعادل پایا به گونه‌ای تعیین می‌شود که گویی نرخ بهره صریح روی پول پرداخت می‌شود.

در ادامه بر مبنای الگوی بیولی، الگوی جدید پی‌ریزی خواهد شد. در این الگوی اعتبار در کنار پول دستوری وارد الگو می‌شود. عوامل اقتصادی می‌توانند بخشی از درآمد خویش را به صورت پول (m) یا اوراق قرضه (b) نگهداری نمایند. اوراق قرضه که در این الگو توسط یک نهاد اعتباری مرکزی مانند خزانه‌داری انتشار داده می‌شود «نرخ بهره اسمی» i را پرداخت می‌نمایند. در این حالت قید بودجه خانوار بر حسب مقادیر واقعی به صورت زیر است:

$$c_t + m_t + b_t \le ws_t + (1+r_t)m_{t-1} + (1+r_t)(1+i_{t-1})b_{t-1} - \delta_t b_{t-1} + gT_t \qquad (۵)$$

بر اساس این قید، خانوارهای نامیرا با استفاده از دارایی اولیه تصادفی خویش و یا پس‌اندازهای انباشت شده از قبل اقدام به مصرف می‌نمایند. خانوار دارای یک دارایی اولیه نیروی کار در زمان t است: s_t که بر طبق یک زنجیره مارکف دو-وضعیتی با ماتریس انتقال $\mathcal{P}$ تغییر می‌کند. اگر مقدار تحقق‌یافته این فرآیند در زمان t برابر $\overline{s_i}$ باشد، در این صورت در زمان t خانوار درآمدی برابر $w\overline{s_i}$بدست خواهد آورد. فرض می‌شود که دستمزد w در طول زمان ثابت است. در فضای ترسیم‌شده در الگوی این مقاله، خانوارها با هدف بیمه شخصی خویش در مقابل ریسک بیکاری اقدام به پس‌انداز احتیاطی می‌کنند. مسئله حداکثرسازی خانوار تعیین یک تابع سیاست $\{m_t\}_{t=0}^{\infty}$و $\{b_t\}_{t=0}^{\infty}$، به ازای مقادیر معین (w, r, i) مقادیر اولیه (m_0, b_0, s_0) جهت حداکثر نمودن تابع هدف (۱) نسبت به قید بودجه خانوار (۵) و همچنین قیود قرض‌گیری است که در ادامه صورت‌بندی خواهد شد.

جهت حل مسئله حداکثرسازی فوق، تابع مقدار (تابع بلمن) زیر پی‌ریزی می‌شود:

$$V(m.b.s) = max\{u(c) + \beta EV(m'.b'.s')|s\} \qquad (۶)$$

که $m'.b'$ مقادیر دارایی نگهداری‌شده در دوره آتی است و s' مقدار شوک تصادفی در دوره آتی است. $V(m.b.s)$ مقدار بهینه تابع هدف به هنگامی است که نقطه شروع، وضعیت دارایی و اشتغال $V(m.b.s)$ باشد.

تعریف تعادل پولی: تخصیص $\{c_t\}_{t=0}^{\infty}$، مقادیر نگهداری‌شده پول $\{m_t\}_{t=0}^{\infty}$، و مقادیر نگهداری‌شده اوراق قرضه $\{b_t\}_{t=0}^{\infty}$، و یک دنباله قیمتی نامنفی $\{p_t\}_{t=0}^{\infty}$ را یک تعادل پولی گویند اگر:

۱) با معین بودن دنباله قیمتی $\{p_t\}_{t=0}^{\infty}$ و مقادیر اولیه پول و اوراق قرضه $\{m_0,b_0\}$ تخصیص $\{c_t\}_{t=0}^{\infty}$ مسئله بهینه‌یابی افراد را حل می‌کند؛

۲) به ازای تمامی t-ها، $p_t \geq 0$؛

۳) قید بودجه دولت برآورده شود: $T_t = T_{t-1}(1+g_t)$.

۴) بازار کالاها تسویه شود: $\sum_{m,b,s} \lambda(m,b,s)c(m,b,s) = \sum_{m,b,s} \lambda(m,b,s)ws$.

۵) عرضه و تقاضای پول برابر شود: $\sum_{m,b,s} \lambda(m,b,s)m(m,b,s) = M$.

آگزیوم‌های الگو به صورت زیر جمع‌بندی می‌شوند. سپس بر مبنای این آگزیوم‌ها، تعادل پولی در فضای الگو اثبات خواهند شد.

۱-۳. آگزیوم‌های الگو

آگزیوم ۱: اقتصاد مورد بررسی یک اقتصاد مبادله‌ای محض است.

آگزیوم ۲: ترجیحات خانوار در قالب تابع مطلوبیت u صورت‌بندی می‌شود که تا دو مرتبه به صورت پیوسته مشتق‌پذیر است. تابع مطلوبیت، فزاینده و أکیداً مقعر است ($u' \geq 0; u'' < 0$) و تابع مطلوبیت نهایی أکیداً محدب است ($u''' > 0$).

آگزیوم ۳: دارایی اولیه خانوار در معرض «ریسک‌های مختص به شخص» (ریسک‌هایی که دارای توزیع کلان نامتغیّر هستند) قرار دارد.[۱] این ریسک‌ها از یک فرآیند مارکف مانا تبعیت می‌نمایند.

آگزیوم ۴: درآمد مصرف‌کننده با احتمال یک مثبت است.

آگزیوم ۵: دو نوع دارایی برای مقابله با ریسک‌های مختص به شخص در اختیار خانوار قرار دارد: پول دستوری و اوراق قرضه.

آگزیوم ۶: وام‌دهی و وام‌گیری وجود ندارد.

(بر طبق آگزیوم فوق، فرد نمی‌تواند مقداری منفی از پول بدون‌پشتوانه و یا اوراق قرضه نگهداری نماید به عبارت دیگر فرد نمی‌تواند بدهی ایجاد نماید).

آگزیوم ۷: به دارایی‌های مالی (اوراق قرضه) نرخ بهره بدون ریسک تعلق می‌گیرد.[۲] همچنین تبدیل این دارایی‌ها به نقدینگی مستلزم انجام هزینه‌های مبادلاتی با نرخ δ است.

آگزیوم ۸: به پول دستوری «نرخ بهره ضمنی» برابر $r=\frac{p_{t-1}}{p_t}-1$ تعلق می‌گیرد.

آگزیوم ۹: اقتصاد در وضعیت مانا قرار دارد (جمعیت ثابت است).

۲-۳. وجود تعادل پولی

$\{s_n\}_{t=-\infty}^{\infty}$ یک فرآیند تصادفی است که هدایت‌کننده نوسانات برونزا در الگو است. متغیرهای تصادفی S_n مقادیر خود را از یک مجموعه متناهی وضعیت‌های محیط $\boldsymbol{A}$ انتخاب می‌کنند. یک «سابقه» برای فرآیند $\{s_n\}$ از زمان صفر تا $\boldsymbol{t}$ یک دنباله متناهی

۱. گرچه درآمد دارای توزیع احتمال کلان ثابتی است، اما مکان فرد درون این توزیع ثابت نیست و در معرض نوسان قرار دارد.

۲. می‌توانیم فرض کنیم که این اوراق قرضه توسط دولت و بانک مرکزی و یا یک نهاد خصوصی از قبیل بانک منتشر می‌شود.

$s_0,s_1,...,s_t$ است. با داشتن سوابق s^0: $s^0=(s_0,s_1,...,s_t)$ ، می‌توان چنین تعریف نمود:

$$S^t(s_0)\equiv\{s^t=s^t=(s_0,s_1,...,s_t)\} \qquad (۷)$$

s^0 ثابت درنظر گرفته می‌شود. از آنجا که تصمیمات مصرف‌کننده در هر وضعیت اطلاعاتی صرفاً بستگی به اطلاعات در دسترس وی در همان وضعیت دارد، «برنامه مصرفی» $\{c_t\}_{t=0}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر بورل است: $c_t: S^t(s^0)\to R_+$. «*برنامه مصرف-دارایی*»[۱] $\{c_t,b_t,m_t\}_{t=0}^{\infty}$ که همچنین با علامت $(\mathbf{c,m,b})$ نشان داده می‌شود، دنباله‌ای از توابع $c_t: S^t(s^0)\to R_+$، $b_t: S^t(s^0)\to R_+$ و $m_t: S^t(s^0)\to R_+$ است ($t\geq 0$). فرض کنید که خانوار در دوره $\boldsymbol{t}$ تصمیم به نگهداری m_t واحد پول نقد و b_t واحد اوراق قرضه نماید. در این صورت عایدی ناخالص این دارایی‌ها در دوره بعد برابر $(1+r_t)m_t$ و $(1+i_t)(1+r_t)b_t$ است.

در اینجا جهت دستیابی به یک تعادل پولی ضرورت دارد فضای وضعیت پیوسته درنظر گرفته شود. قید بودجه جدید چنین صورتبندی می‌شود: $(m,b)\in\Phi_t(s^t)$. فرض می‌شود که $\Phi_t(s^t)$ نگاشتی «پیوسته» از $S^t(s^0)$ به R^2 باشد. همچنین $\Phi_t(s^t)$ زیرمجموعه‌ای ناتهی، بسته، و محدب از R است. $\phi_t(s^t)$ را چنین تعریف می‌کنیم: $\phi_t(s^t)\equiv\inf\{m+b: m,b\in\Phi_t(s^t)\}$. در واقع ϕ_t نشان‌دهنده حداقل مقدار دارایی ممکن (بر حسب مصرف دوره $\boldsymbol{t}$) است که خانوار می‌تواند در پایان دوره t نگهداری نماید. برای اعمال آگزیوم محدودیت وام‌دهی و وام‌گیری، $\Phi_t(s^t)$ باید از پایین کران‌دار باشد: $\Phi_t(s^t)\subset\{(m,b)\in\mathbb{R}^2: m\geq\phi_m, b\geq\phi_b\}$. فرض می‌شود که به ازای تمامی $m,b\in\Phi_t(s^t)$ و تمامی s^t-ها:

$$ws^t+(1+r_t)m_t+(1+r_t)(1+i_t)b_t-\delta b_t+g_tT_t\geq\phi_t$$

---

۱. Consumption-Portfolio Program

و به ازای تمامی $s^t \in S^t(s^0)$:

$$ws^t + (1+r_t)m_t + (1+r_t)(1+i_t)b_t - \delta b_t + g_t T_t \geq \phi_t(s^t)$$

همچنین فرض کنید که:

$$\bar{\Phi}_t(m,b,s^t) \equiv \left\{ \begin{array}{l} (c,m,b) \in \mathbb{R}_+ \times \bar{\Phi}_t(s^t): \\ 0 \leq c \leq -\phi_m + ws^t + (1+r_t)m_t + (1+r_t)(1+i_t)b_t - \delta b_t + g_t T \end{array} \right\} \quad (۸)$$

$\bar{\Phi}_t(m,b,s^t)$ علامت مجموعه مصرف- دارایی دسترس‌پذیر برای خانوار است. در این فضا اثبات می‌شود که وقتی تعادل پولی «وجود» دارد که نرخ بهره کمتر از نرخ رجحان زمانی باشد:

قضیه (۱): «وجود تعادل پولی» در شرایط وجود همزمان پول و اعتبار: درنظر بگیرید نرخ بهره کوچکتر از نرخ رجحان زمانی باشد ($\beta(1+r) < 1$). در این صورت یک تخصیص یکتای $\{c_t\}_{t=0}^{\infty}$ و توابع سیاست بهینه یکتای $\{m_t\}_{t=0}^{\infty}$ و $\{b_t\}_{t=0}^{\infty}$ وجود دارد که حداکثرسازنده $U = E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$ نسبت به قید $(c_t, m_t, b_t) \in \bar{\Phi}_t(m_t, b_t, s^t)$ است.

در اینجا اثبات می‌شود که یک جواب بهینه برای مسئله فوق «وجود» دارد. مصرف‌کننده بایستی یک سبد دارایی بهینه و یک برنامه مصرفی بهینه را در هر دوره انتخاب نماید. چنان‌که در ادبیات اقتصادی متداول است، برای اثبات قضایای وجود تعادل از «قضایای نقطه ثابت»[۱] بهره گرفته می‌شود. در اینجا نیز فضایی متریک پی‌ریزی می‌شود و با استفاده از قضیه «نگاشت انقباظی» وجود یک نقطه ثابت اثبات می‌شود. از آنجا که برای این کار لازم است یک نگاشت پیوسته T از یک فضای محدب فشرده وجود داشته

۱. Fixed Point Theorems

باشد،[1] بنابراین ضرورت دارد هر یک از این ویژگی‌ها برای نگاشت T و برای فضای متریک تعریف‌شده اثبات شود.[2]

۳-۳. اثرات نرخ بهره بر مسیر مصرف بهینه

در این قسمت نشان داده می‌شود که برای هر ترکیبی که بین پول و اعتبار شکل بگیرد، قضیه همگرایی سوپرمارتینگل قابل بکارگیری است. بنابراین بدون توجه به ترکیب بهینه پول و اعتبار در سبد دارایی خانوار نتیجه زیر صادق است:

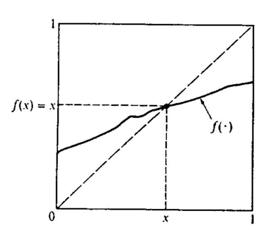
اگر نرخ‌های بهره نهایی بلندمدت بیشتر از نرخ رجحان زمانی باشد، مصرف به سمت بی‌نهایت واگرا خواهد شد. اگر نرخ بهره ضمنی روی پول کوچکتر از نرخ رجحان زمانی باشد ($r<\rho$) و به عبارت دیگر $\beta(1+r)<1$، و همچنین اگر $\beta[(1+r)(1+i)-\delta]<1$، آنگاه قضیه زیر قابل اثبات است:

قضیه (۲): فرض کنید آگزیوم‌های فوق صادق باشد. آنگاه در صورتی که $t\to\infty$ با احتمال یک وجودخواهد داشت: $\lim_{t\to\infty} c_t^* = \bar{c}$.[3]

۱. قضیه نقطه ثابت برائر به ترتیب زیر است:

قضیه نقطه ثابت برائر (Brouwer's fixed point theorems): فرض کنید که $A\subset R^N$ یک مجموعه ناتهی، فشرده و محدب باشد و $f: A\to A$ یک نگاشت پیوسته از A به درون خود A باشد. در این صورت نگاشت f دارای یک نقطه ثابت است.

بر اساس این قضیه، یک نقطه $x\in A$ وجود دارد که. ($x=f(x)$) x «نقطه ثابت» نامیده می‌شود. چنانکه در شکل زیر ملاحظه می‌شود، پیوستگی تابع f شرطی ضروری برای تضمین وجود نقطه ثابت است. این شرط از طریق «ویژگی فلر» تامین می‌شود.



۲. اثبات در ضمیمه (۱).

۳. اثبات در ضمیمه (۲).

اما اگر نرخ بهره ضمنی روی پول بیشتر از نرخ رجحان زمانی باشد ($r > \rho$) و به عبارت دیگر $\beta(1+r) > 1$، و یا $\beta\left[(1+r)(1+i) - \delta\right] > 1$، آنگاه اثبات می‌شود که مصرف به سمت بی‌نهایت میل خواهد نمود:

قضیه (۳): فرض کنید $\beta(1+r) > 1$ و یا $\beta\left[(1+r)(1+i) - \delta\right] > 1$، و آگزیوم‌های فوق نیز صادق باشد. آنگاه با احتمال یک: $\lim_{t\to\infty} c_t^* = \infty$.[۱]

دلالت این قضیه این است که اگر نرخ بهره ضمنی روی پول بیشتر یا برابر نرخ تنزیل باشد و همچنین درآمد به میزان لازم با نااطمینانی مواجه باشد آنگاه به دلیل شکل‌گیری انگیزه‌های احتیاطی برای پس‌انداز دارایی، دارایی به صورت بی‌کران رشد خواهد نمود و مصرف نیز متعاقب آن بدون هیچ کرانی افزایش خواهد یافت و به سمت بی‌نهایت میل خواهد نمود. همچنین اثبات می‌شود که در صورتی که دارایی به صورت نامحدودی افزایش یابد، متعاقب آن مصرف نیز به صورت نامحدودی افزایش خواهد یافت.[۲]

دلالت دو قضیه فوق این است که رفتار حدی مصرف بستگی به رابطه نرخ بهره با نرخ رجحان زمانی دارد. اگر نرخ بهره بزرگتر از نرخ رجحان زمانی باشد ($r > \rho$ یا $\beta(1+r) > 1$)، در این صورت مادامی که درآمد مثبت باشد مصرف به صورت نامحدود رشد خواهد نمود. اگر نرخ بهره برابر نرخ رجحان زمانی باشد ($r = \rho$ یا $\beta(1+r) = 1$)، مصرف در صورتی که درآمد به اندازه کافی تصادفی باشد به سمت بی‌نهایت میل خواهد نمود. بنابراین برای دستیابی به یک تعادل آماری لازم است که نرخ بهره کمتر از نرخ رجحان زمانی باشد. جدول (۱) نتایج این قسمت را تلخیص می‌نماید.

۱. اثبات در ضمیمه (۳).

۲. اثبات در ضمیمه (۴).

جدول (۱). اثرات نرخ بهره بر دارایی و مصرف در الگو با وجود همزمان پول دستوری و اعتبار

	نرخ بهره	دارایی	مصرف
نرخ بهره ضمنی روی پول دستوری	$r < \rho$	$a_t \underset{a.s}{\rightarrow} \bar{a}$	$c_t \underset{a.s}{\rightarrow} \bar{c}$
	$r > \rho$	$a_t \underset{a.s}{\rightarrow} +\infty$	$c_t \underset{a.s}{\rightarrow} +\infty$
نرخ بهره واقعی روی اوراق قرضه	$\left[(1+r)(1+i)-\delta\right] < \rho$	$a_t \underset{a.s}{\rightarrow} \bar{a}$	$c_t \underset{a.s}{\rightarrow} \bar{c}$
	$\left[(1+r)(1+i)-\delta\right] > \rho$	$a_t \underset{a.s}{\rightarrow} +\infty$	$c_t \underset{a.s}{\rightarrow} +\infty$

منبع: یافته‌های پژوهش

چنان‌که ملاحظه می‌شود، برای دستیابی به سطوح تعادلی همگرای مصرف و دارایی ضرورت دارد که نرخ بهره روی پول و اعتبار کمتر از نرخ رجحان زمانی باشد.

۴. نتیجه‌گیری و پیشنهادات سیاستی

وجود ریسک مختص به شخص در شرایط بازارهای ناقص (عدم دسترسی کامل به بازارهای بیمه) انگیزه انجام پس‌انداز احتیاطی با هدف بیمه شخصی از سوی خانوارها است. در شرایطی که یک دارایی منحصر بفرد برای بیمه شخصی وجود داشته باشد این کار از طریق انباشت این دارایی انجام می‌پذیرد. اما در شرایطی که دو دارایی جهت انجام بیمه شخصی وجود داشته باشد، به عنوان مثال اگر همانند الگو طراحی‌شده در این مقاله هم پول دستوری و هم اعتبار وجود داشته باشد، تحلیل پیچیده‌تر می‌شود. در این مقاله اثبات شد که در این وضعیت نیز همچنان نتایج الگوهای بیولی صادق است یعنی در صورتی که نرخ بهره برابر نرخ رجحان زمانی وضع شود توزیع‌های مقطعی ثروت و مصرفی به سمت بی‌نهایت واگرا می‌شوند. از این رو ضرورت دارد که با کاهش مکفی نرخ بهره ($r < \rho$) شرایط را به نحوی رقم زد که منجر به همگرا شدن این توزیع‌های مقطعی شوند. البته از آنجا که تعادل مانا مستلزم برابری این دو نرخ است، تنها حالتی که هر دو معیار برآورده شود این است که نرخ رجحان زمانی برابر صفر شود. تا مادامی که نرخ رجحان زمانی

مثبت باشد، تضمینی برای تحقق معیارهای بهینگی و پایداری وجود ندارد. چنان که گفته شد، «نرخ مثبت رجحان زمانی» منجر به این می شود که پس‌انداز اجتماعی، بسیار کمتر از مقدار بهینه آن باشد وبنابراین شرایط تخصیص بهینه منابع در طول زمان مطلقاً شکل نگیرد و موجبات بروز عدم بهینگی را فراهم نماید و یکی از مهم‌ترین موارد «شکست بازار» در نظام اقتصاد بازار (یعنی شکست در تحقق کارآیی) را رقم می‌زند.

در پایان باید اشاره کرد که در کشور ایران گرچه دسترسی به بازارهای اوراق قرضه دارای ممنوعیت قانونی است اما در عمل حساب‌های سپرده بلندمدت بانکی و همچنین اوراق مشارکت تضمینی منتشره توسط دولت و یا بانک‌ها، به عنوان بدیلی برای اوراق قرضه (دارایی‌های با نرخ بهره بدون ریسک) ایفای نقش نموده‌اند. از سوی دیگر بدلیل محدودیت این بازارهای وام ربوی و عدم گستردگی بیمه بیکاری و عدم وجود پوشش بیمه‌ای کامل، آگزیوم ناقص بودن بازارها در بسیاری از موارد در کشور ما مصداق دارد که موجب تناسب بیشتر الگوهای بیولی برای کشور ما می‌شوند. از آنجا که در یک فضای عدم وجود بازارهای بیمه کامل، نرخ‌های بهره واقعی در سطحی پایین‌تر از نرخ رجحان زمانی بایستی تعیین شوند تا تعادل پولی بتواند شکل بگیرد. نتیجتاً دلالت عملیاتی الگوهای بیولی این است که ضرورت دارد مقامات پولی، نرخ بهره را به کمتر از نرخ رجحان زمانی کاهش دهند.

۵. ضمایم

۵-۱. اثبات قضیه (۱)

ابتدا یک فضای متریک تشکیل داده می‌شود: درنظربگیرید (Z,d) یک فضای متریک باشد که Z به ترتیب زیر تعریف می‌شود:

$$Z \equiv \left\{(m,b,s^t) : m_t \geq m_t(s^t), b_t \geq b_t(s^t), s^t \in S^t(s^0), t = 0,1,\ldots\right\} \qquad (۱۰)$$

اکنون متریک d (یا همان تابع فاصله d) روی این فضا تعریف می‌شود:

$$d\big((a.s^t).(a'.s^J)\big) = \begin{cases} 1. \text{ if } j \neq t \\ max\{|a-a'|\mu(s_1.s'_1).\ldots.\mu(s_1.s'_1)\} \text{ if } j \neq t \end{cases} \qquad (۱۱)$$

که

$a = ws + (1+r)m + (1+r)(1+i)b - \delta b + gT$، و μ متریک روی $\mathbf{R}^n$ است. به ازای هر $V : Z \to \mathbf{R}$ درنظربگیرید $\|V\| = \sup_{z \in Z} |V(s)|$. همچنین درنظربگیرید $D(Z)$ نشان‌دهنده مجموعه توابع پیوسته $V : Z \to \mathbf{R}$ است به قسمی که $0 \le V \le K$ و $V(m,b,s^t)$ روی m,b مقعر و غیرکاهنده است. لازم به تذکر است که $D(Z)$ یک فضای متریک کامل تحت متریک $\|V_1 - V_2\|$ است. عملگر T روی $D(Z)$ چنین تعریف می‌شود:

$$\max_{(c.m.b)\in\Phi_t(m.b.s^t)} \begin{Bmatrix} u(c) + \beta E(ws^t + (1+r)m' + \\ (1+r)(1+i)b' - \delta b'; s^{t+1}|s^t) \end{Bmatrix} \quad (۱۲)$$

برای استفاده از قضایای نقطه ثابت ضرورت دارد که اثبات شود عملگر T یک نگاشت انقباضی از $D(Z)$ به روی $D(Z)$ است:

لم: T یک نگاشت انقباضی از $D(Z)$ به روی $D(Z)$ است.

اثبات: ابتدا بایستی نشان داد که اگر $V \in D(Z)$ آنگاه $TV \in D(Z)$. فرض کنید که $V \in D(Z)$. از آنجا که $0 \le V \le K$ بدیهی است که $0 \le TV \le K$. همچنین از آنجا که V یکنوا و غیرکاهنده است، بنابراین TV نیز که یک تبدیل یکنوای مثبت از V است نیز یکنوا و غیرکاهنده است. اکنون بایستی نشان داد که TV پیوسته نیز است. از آنجا که $d(z.z') < 1$ دلالت براین دارد که $t = t'$، s موقوف به t می‌شود و از این رو به جای s^t صرفاً s نوشته می‌شود.

برای تضمین وجود جواب، پیوستگی TV ضرورت دارد. برای اثبات پیوستگی TV فروض خاصی روی احتمالات انتقال وضع می‌شود. فرض می‌شود که به ازای هر s^0 «ویژگی فلر»[1] صادق است: بر طبق این ویژگی، به بیان ساده اگر $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ یک تابع پیوسته کران‌دار باشد، در این صورت تابع چگالی احتمال $g(s^t) = \int f(s)\pi(ds|s^t)$ نیز یک تابع پیوسته $g(s^t): S^t(s^0) \to R_+$ است. در فضای الگوی فعلی، تابع f و g چنین تعریف می‌شود. درنظربگیرید به ازای $w \in \mathbf{R}^n$ تابع V چنین تعریف شود:

(۱۳)

$$V(m,b,s,w) = V\left(ws(w) + (1+r)m + (1+r)(1+i)b - \delta b + gT; (s,w)\right)$$

و بالتبع تابع چگالی احتمال به صورت زیر بدل می‌شود:

$$G(m,b,s) = \int V(m,b,s,w)\,p(dw|s) \quad (۱۴)$$

در این صورت عملگر TV جدید به صورت زیر خواهد بود:

$$TV(m,b,s) = \sup\{u(c) + \beta G(m,b,s)\} \quad (۱۵)$$

---
۱. Feller Property

بدلیل فرض پیوستگی تابع مطلوبیت u در کنار ویژگی پیوستگی و فشردگی فضای دسترس‌پذیر $\bar{\Phi}_t(m_t, b_t, s')$ اثبات می‌شود که اگر G پیوسته باشد، عملگر TV نیز پیوسته است.[1] بنابراین ضرورت دارد که اثبات نماییم G پیوسته است:

برای اثبات پیوستگی G بایستی نشان داد که به ازای هر $\varepsilon > 0$، وجود دارد $\delta > 0$ که $\bar{d}\big((m.b.s).(m'.b'.s')\big) < \delta$ ، به قسمی که $|G(m.b.s) - G(m'.b'.s')| < \varepsilon$. ابتدا فاصله $\bar{d}$ چنین تعریف می‌شود:

$$\bar{d}\big((m.b.s).(m'.b'.s')\big) = \max[\mu_1(m.b; m'.b').\mu_2(s.s')] \quad (۱۶)$$

که $\mu_1.\mu_2$ متریک‌های اقلیدسی (و به عبارت ساده همان فاصله متداول) هستند. بر طبق ویژگی تابع چگالی احتمال:

$$|G(m.b.s) - G(m'.b'.s')| \le \left|\int V(m.b.s.w)\left(p(dw|s) - p\big(dw|s'\big)\right)\right| + \int |V(m.b.s.w) - V(m'.b'.s'.w)| p\big(dw|s'\big) \quad (۱۷)$$

با استفاده از ویژگی فلر به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta_1 > 0$ وجود دارد به قسمی که به ازای $\bar{d}\big((m.b.s).(m'.b'.s')\big) < \delta_1$:

$$\left|\int V(m.b.s.w)\left(p(dw|s) - p\big(dw|s'\big)\right)\right| < \varepsilon \quad (۱۹)$$

از آنجا که $S^t(s^0)$ یک فضای اقلیدسی دارای ابعاد متناهی است، ویژگی فلر دلالت بر این دارد که یک فضای فشرده $A \subset \mathbf{R}^n$ و یک $\delta_2 > 0$ وجود دارد به قسمی که اگر $\bar{d}\big((m.b.s).(m'.b'.s')\big) < \delta_2$ آنگاه:

$$\int_{n \in A} p\big(dw|s'\big) < \frac{\epsilon}{K} \quad (۲۰)$$

از آنجا که V به صورت همسانی روی مجموعه‌های فشرده پیوسته است، می‌توان یک δ_3 انتخاب نمود به قسمی که اگر $\bar{d}\big((m.b.s).(m'.b'.s')\big) < \delta_3$ آنگاه به ازای $w \in A$:

$$|V(m.b.s.w) - V(m'.b'.s'.w)| < \varepsilon \quad (۲۱)$$

بنابراین اگر $\bar{d}\big((m.b.s).(m'.b'.s')\big) < \min\{\delta_2.\delta_3\}$ ، آنگاه:

$$\int |V(m.b.s.w) - V(m'.b'.s'.w)| p\big(dw|s'\big) < \epsilon\left(K.\frac{1}{K}\right) + \varepsilon = 2\varepsilon \quad (۲۲)$$

با ترکیب این نتایج خواهیم داشت $\bar{d}\big((m.b.s).(m'.b'.s')\big) < \min\{\delta_1.\delta_2.\delta_3\}$ متضمن این است که:

$$|G(m.b.s) - G(m'.b'.s')| < 3\varepsilon \quad (۲۳)$$

بدین ترتیب اثبات می‌شود که $TV\ (m,b,s')$ روی m,b مقعر است. تقعر تابع مطلوبیت و همچنین تقعر تابع $G(m,b,s')$ روی m,b تضمین‌کننده تقعر TV هستند. بنابراین با اثبات یکنوایی، کاهنده

---

۱. جهت ملاحظه اثبات رجوع شود به: (هیلدنبراند، ۱۹۷۴، ۳۰).

نبودن، پیوستگی و تقعر TV نتیجه می‌شود که $TV \in D(Z)$. از آنجا که به ازای هر $V_1,V_2 \in D(Z)$ خواهیم داشت $\|TV_1 - TV_2\| \le \beta \|V_1 - V_2\|$،[1] نتیجه می‌شود که عملگر T یک نگاشت انقباظی است ■

لم: یک $V \in D(Z)$ منحصربفرد وجود دارد به قسمی که $TV = V$.

اثبات: از آنجا که T یک نگاشت انقباظی است و همچنین $D(Z)$ یک فضای متریک فشرده است بنابراین با استفاده از «قضیه نقطه ثابت نگاشت انقباظی» لم فوق نتیجه می‌شود ■

حال درنظر بگیرید که $\mathbf{c}^* = \{c_0^*, c_1^*, ...\}$ برنامه مصرفی باشد که مسئله حداکثرسازی مصرف‌کننده را حل می‌نماید. همچنین دنباله‌های متناظر $\mathbf{m}^* = \{m_0^*, m_1^*, ...\}$ و $\mathbf{b}^* = \{b_0^*, b_1^*, ...\}$ نشان‌دهنده دنباله متغیرهای تصادفی است که مقدار مانده‌های نقدی نگهداری‌شده و اوراق قرضه فرد در هر دوره را پس از تحقق درآمد تصادفی وی نمایش می‌دهد. دنباله‌های $\mathbf{m}^*$ و $\mathbf{b}^*$ به صورت بازگشتی با استفاده از رابطه قید بودجه و داشتن مقادیر دوره صفر و همچنین سطح بهینه مصرف تعیین می‌شوند. از این لم به همراه قضیه پنجم استراچ (۱۹۶۶) نتیجه می‌شود که:

$$V(m,b,s^t) = E\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t^*) \middle| s^t\right]$$

بنابراین یک تابع سیاست بهینه c_t^* وجود دارد به قسمی که «جواب» مسئله برنامه‌ریزی پویای فرد است یعنی تابع مطلوبیت انتظاری تنزیل‌شده فرد را در طول زمان حداکثر می‌سازد (قضیه ششم بلک‌ول، ۱۹۶۵). فرض تقعر أکید تابع مطلوبیت به همراه تقعر تابع چگالی احتمال (G) و تحدب فضای دسترس‌پذیر ($\bar{\Phi}_t$) تضمین می‌کنند که تخصیص مصرفی بهینه c_t^* «یکتا» است ■

۲-۵. اثبات قضیه (۲)

تابع لاگرانژ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}\ell = u(c_t) - \lambda_t(c_t + m_t + b_t - \omega s_t - (1+r_t)m_{t-1} - (1+r_t)(1+i_{t-1})b_{t-1} + \delta_t b_{t-1} - g_t T_t) \\ - \beta E_t \lambda_{t+1}(c_{t+1} + m_{t+1} + b_{t+1} - \omega s_{t+1} - (1+r_{t+1})m_t - (1+r_{t+1})(1+i_t)b_t + \delta_{t+1} b_t - g_{t+1} T_{t+1})\end{aligned}$$

شرایط مرتبه اول (قاعده اولر) به صورت زیر است:

$$\frac{\partial \ell}{\partial c_t} = u'(c_t) - \lambda_t = 0 \qquad (۲۴)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial m_t} = -\lambda_t + \beta E_{t+1}\lambda_{t+1}(1 + r_{1+t}) = 0 \qquad (۲۵)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial b_t} = -\lambda_t + \beta E_{t+1}\lambda_{t+1}\left[(1+r_{t+1})(1+i_t) - \delta_{t+1}\right] = 0 \qquad (۲۶)$$

از ترکیب شرط (۲۴) و (۲۵) نتیجه زیر بدست می‌آید:

۱.برای ملاحظه اثبات رجوع شود به: بلک‌ول، ۱۹۶۵، قضیه ۵.

$$u'(c_t) = \beta E_t \left[(1+r_{t+1})u'(c_{t+1})\right] \tag{۲۷}$$

در اینجا اثبات برای یک تصریح خاص از تابع مطلوبیت انجام می‌شود، بدیهی است که به راحتی برای حالت کلی نیز قابل اثبات است. فرض کنید که تابع مطلوبیت دارای فرم «ریسک‌گریزی نسبی ثابت» باشد: $u(c_t) = \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \gamma > 1$. در این صورت معادله اولر (۲۷) به صورت زیر خواهد بود:

$$c_t^{-\gamma} = \beta E_t \left[(1+r_{t+1})c_{t+1}^{-\gamma}\right] \tag{۲۸}$$

اگر طرفین به توان $-\frac{1}{\gamma}$ برسد چنین به دست می‌آید:

$$c_t = \left(\beta(1+r_{t+1})\right)^{-1/\gamma} E_t \left[c_{t+1}\right]$$

از آنجا که طبق فرض $\beta(1+r) < 1$، در نتیجه $\beta(1+r)^{-\frac{1}{\gamma}} < 1$. در نتیجه $c_t \geq E_t \left[c_{t+1}\right]$. بنابراین c_t یک سوپرمارتینگل نامنفی است بنابراین «قضیه همگرایی سوپرمارتینگل» $E(Z_t|f) = Z_s$ درباره آن صادق خواهد بود.[۱] بنابراین c_t تقریباً همه جا (با احتمال یک) به سمت یک حدّ معین میل خواهد نمود. از طریق ترکیب شروط (۲۴) و (۲۶) نیز با پیمودن فرآیند استدلالی مشابه اثبات می‌شود که اگر $\beta\left[(1+r)(1+i)-\delta\right] < 1$ آنگاه با احتمال یک c_t به سمت یک حد معین میل خواهد نمود.

---

۱. فرض کنید $(\Omega.\mathcal{F}.P)$ یک فضای احتمال و $T = \{0,1,...\}$ و یا در حالت پیوسته زیرفاصله‌ای از بازه $T \subseteq [0,\infty]$، و $t \in T$ اندیس زمان باشد. خانواده $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ از زیرسیگما-میدان‌های $\mathscr{F}$ (یعنی اگر $s < t$ آنگاه $\mathcal{F}_s \leq \mathcal{F}_t$) را یک فیلتراسیون گویند. فرض کنید که:

۱. $E|Z_t| < +\infty$؛

۲. Z_t نسبت به $\mathcal{F}_t$ اندازه‌پذیر باشد،

۳. به ازای تمامی $s,t \in T; s < t$ تقریباً همه‌جا (با احتمال یک) $E(Z_t|\mathcal{F}_s) = Z_s$.

آنگاه $\{Z_t.\mathcal{F}_t.t \in T\}$ یک **مارتینگل** نسبت به $\mathcal{F}_t$ نامیده می‌شود.

با حفظ دو فرض اول و تغییر فرض ۳ تعاریف جدید زیرا را خواهیم داشت:

- اگر تقریباً همه‌جا $E(Z_t|\mathcal{F}_s) \geq Z_s$ آنگاه $\{Z_t\}$ یک زیرمارتینگل نامیده می‌شود.

اگر تقریباً همه‌جا $E(Z_t|\mathcal{F}_s) \leq Z_s$ آنگاه $\{Z_t\}$ یک **سوپرمارتینگل** نامیده می‌شود. در حالت خاص هرگاه $E(Z_{t+1}) \leq Z_s$ آنگاه $\{Z_t\}$ یک **سوپرمارتینگل** نامیده می‌شود. در اینجا قضیه مهم زیر را داریم که نقشی کلیدی در اثبات قضایای مربوط به پس‌انداز احتیاطی ایفا می‌کند:

قضیه همگرایی سوپرمارتینگل: در نظر بگیرید $\{\boldsymbol{Z_t.\mathcal{F}_t.t \in T}\}$ یک سوپرمارتینگل نامنفی است. آنگاه یک متغیر تصادفی Z وجود دارد به قسمی که تقریباً همه‌جا $\lim Z_t = Z$ یعنی Z تقریباً همه‌جا به سمت یک حدّ متناهی همگرا می‌شود (برای ملاحظه اثبات این قضیه، رجوع شود به: آتریا و لاهیری (۲۰۰۶، ۴۱۹)).

۳-۵. اثبات قضیه (۳)

برای اثبات ابتدا تابع مقدار (تابع بلمن) برای مسئله برنامه‌ریزی پویای مصرف‌کننده تشکیل داده می‌شود:

$$V(m_{t-1},b_{t-1}) = \max_{m_t,b_t,c_t}\left[u(c)+\beta EV(m_t,b_t)\right]$$

نسبت به قید:

$$c_t + m_t + b_t \le ws_t + (1+r_t)m_{t-1} + (1+r_t)(1+i_{t-1})b_{t-1} - \delta_t b_{t-1} + g_t T_t$$

اگر قید در حالت تساوی درنظر گرفته شود و بازنویسی شود نتیجه زیر به دست خواهد آمد:

$$b_t = -c_t - m_t + ws_t + (1+r_t)m_{t-1} + (1+r_t)(1+i_{t-1})b_{t-1} - \delta_t b_{t-1} + gT_t \qquad (۲۹)$$

$$m_t = -c_t - b_t + ws_t + (1+r_t)m_{t-1} + (1+r_t)(1+i_{t-1})b_{t-1} - \delta_t b_{t-1} + gT_t \qquad (۳۰)$$

با جایگذاری رابطه فوق در تابع مقدار چنین نتیجه می‌شود:

$$V(m_{t-1},b_{t-1}) = \max_{m_t,b_t,c_t}\Big\{u(c)+\beta EV\Big[\big(\omega s_t - c_t - m_t + (1+r_t)m_{t-1} + (1+r_t)(1+i_{t-1})b_{t-1} - \delta_t b_{t-1} + g_t T_t\big);$$
$$\big(\omega s_t - c_t - b_t + (1+r_t)m_{t-1} + (1+r_t)(1+i_{t-1})b_{t-1} - \delta_t b_{t-1} + g_t T_t\big)\Big]\Big\}$$

با استفاده از رابطه بنونایس- شینکمن[1] نتیجه می‌شود که:

$$V_m'(m_{t-1}^*,b_{t-1}^*) = \beta E(1+r_t)V_m'(m_t^*,b_t^*) \qquad (۳۱)$$

$$V_b'(m_{t-1}^*,b_{t-1}^*) = \beta E\left[(1+r_t)(1+i_{t-1})-\delta_t\right]V_b'(m_t^*,b_t^*) \qquad (۳۲)$$

همچنین: $V_c'(m_{t-1}^*,b_{t-1}^*) = u'(c_t^*)$. لازم به تذکر است که تابع مقدار V ویژگی‌های تابع مطلوبیت u را به وام می‌گیرد و نتیجتاً کران‌دار و أکیداً مقعر است. اگر درآمد مقدار مثبتی باشد آنگاه لم زیر قابل طرح است:

لم: یک متغیر تصادفی حقیقی- مقدار z وجود دارد به قسمی که تقریباً همه‌جا:

$$\lim \beta E\left[(1+r_t)(1+i_{t-1})-\delta_t\right]V_b'(m_t^*,b_t^*) = \bar{z}_b \qquad (۳۳)$$

$$\lim \beta E(1+r_t)V_m'(m_t^*,b_t^*) = \bar{z}_m \qquad (۳۴)$$

اثبات: برای اثبات کافی است نشان داده شود که

$\beta E\left[(1+r_t)(1+i_{t-1})-\delta_t\right]V_b'(m_t^*,b_t^*)$ و $\beta E(1+r_t)V_m'(m_t^*,b_t^*)$ یک سوپرمارتینگل نامنفی است. در این صورت طبق قضیه همگرایی سوپرمارتینگل این دو عبارت به سمت یک متغیر تصادفی متناهی همگرا خواهند شد. تنها مشکلی که بر سر راه اثبات وجود دارد این است که این دو عبارت نبایستی بی‌نهایت باشند، حال آنکه وقتی بر طبق شرایط اینادا، $\lim_{c\to 0} u'(c) = +\infty$ و از آنجا که طبق قضیه بنونایس-شینکمن، $V_c'(m_{t-1}^*,b_{t-1}^*) = u'(c_t^*)$ بنابراین $V_0' = \infty$. برای حل این مشکل فرض می‌شود که ارزش تنزیل‌شده کل جریان درآمدی همواره مثبت است. در واقع در این حالت یک «زمان توقف» T وجود دارد به قسمی که $m_T^* > 0, b_T^* > 0$. بدین ترتیب می‌توان از قضیه همگرایی مارتینگل استفاده نمود.

۱. فرم خاصی از قضیه پوش (Envelop Theorem).

بنابراین قبل از ارائه اثبات ضرورت دارد تعریف زیر ارائه شود:

تعریف «زمان توقف»[1]: درنظربگیرید $(\Omega,\mathcal{F})$ یک فضای اندازه باشد، و در نظر بگیرید $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ یک خانواده فزاینده از زیر-سیگما-میدان‌های $\mathcal{F}$ باشند. متغیر تصادفی مثبت T که روی Ω تعریف شده است را یک «زمان توقف» (نسبت به خانواده $(\mathcal{F}_t)$) گویند هرگاه T دارای ویژگی زیر باشد:

به ازای تمامی $t\in\mathbb{R}^+$ ، رخداد $\{T<t\}\in\mathcal{F}_t$ متعلق به $\mathcal{F}_t$ باشد.

اگر خانواده سیگما-میدان‌های $(\mathcal{F}_t)$ از سمت راست پیوسته باشند، آنگاه یک زمان توقف T خواهد داشت. به بیان شهودی، زیر-سیگما-میدان $\mathcal{F}_t$ معرّف رخدادهایی است که پیش از لحظه t رخ می‌دهند. متغیرهای تصادفی $\mathcal{F}_t$-اندازه‌پذیر متغیرهایی هستند که صرفاً متعلق به تحولات فضای مورد بررسی قبل از لحظه t هستند. اکنون درنظربگیرید یک مشاهده‌گر به دنبال مشاهده پدیده‌ای خاص است، و زمان T اولین باری است که این پدیده رخ می‌دهد. رخداد $\{T<t\}$تنها در صورتی رخ خواهد داد که پدیدار مورد نظر حداقل یک بار قبل از لحظه t تولید شود (میر، ۱۹۶۶، ۶۵).

مثبت بودن درآمد تضمین می‌کند که یک زمان توقفT وجود دارد به قسمی که $ws_T>0$. بنابراین $m_T^*+b_T^*\geq ws_T>0$. همچنین آگزیوم عدم وام‌دهی و وام‌گیری متضمن این است که $m_T^*>0, b_T^*>0$. تقعر تابع بلمن متضمن این است که $V'(m_t^*,b_t^*)$ متناهی است[2]. درنظربگیرید d_t^m و d_t^b به ازای $t\geq 0$ چنین تعریف شود:

$$d_t^b=\frac{\beta E\left[(1+r_{t+T})(1+i_{t+T-1})-\delta_{t+T}\right]V'_{b;t+T}(m_{t+T}^*,b_{t+T}^*)}{\beta E\left[(1+r_T)(1+i_{T-1})-\delta_T\right]V'_{b;T}(m_T^*,b_T^*)} \tag{۳۵}$$

$$d_t^m=\frac{\beta E(1+r_{t+T})V'_{m;t+T}(m_{t+T}^*,b_{t+T}^*)}{\beta E(1+r_T)V'_{m;T}(m_T^*,b_T^*)} \tag{۳۶}$$

با استفاده از رابطه بنونایس- شینکمن $V'(m_t^*,b_t^*)=u'(c)$ و همچنین فرض تقعرأکید تابع مطلوبیت، V' نزولی بوده بنابراین $V'_{m;t+s+T}(m_{t+T}^*,b_{t+T}^*)\leq V'_{m;t+T}(m_{t+T}^*,b_{t+T}^*)$ در نتیجه $d_t^m\geq E(d_{t+s}^m), d_t^b\geq E(d_{t+s}^b)$. از آنجا که$T$ یک «زمان توقف» است، بنابراین دنباله‌های $\{d_0^m,d_1^m,\dots\},\{d_0^b,d_1^b,\dots\}$ یک سوپرمارتینگل نامنفی هستند. بنابراین می‌توان قضیه همگرایی سوپرمارتینگل را برای این دنباله‌ها بکار گرفت. بر اساس قضیه همگرایی، هر دو دنباله d_t^m و d_t^b به سمت یک حد معین همگرا می‌شود. بنابراین با احتمال یک: $\lim_{t\to\infty}d_t^m=\bar{d}_m$ و

۱ Stoppingtime

۲.زیرا به دلیل فرض تقعر تابع بلمن، $V''\leq 0$ بنابراین V' کاهنده است و نتیجتاً به سمت $+\infty$ میل نمی‌کند. از سوی دیگر به دلیل فرض تحدب أکید تابع مطلوبیت نهایی، مشتق سوم تابع مقدار نیز مثبت است بنابراین V' منفی نخواهد شود و نتیجتاً به سمت $-\infty$ میل نخواهد کرد.

$\lim_{t\to\infty} d_t^b = \bar{d}_b$. همچنین بدیهی است که $d_0^m = 1, d_0^b = 1$. از این رو بدلیل کاهنده بودن این دنباله‌ها، $E(\bar{d}_b) \le 1, E(\bar{d}_m) \le 1$.

از آنجا که $\lim_{t\to\infty} d_t^b = \bar{d}_b$ بنابراین با گرفتن حدّ از طرفین رابطه (۳۵) نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\lim_{t\to\infty} d_t^b = \lim_{t\to\infty} \frac{\beta E\left[(1+r_{t+T})(1+i_{t+T-1})-\delta_{t+T}\right]V'_{b;t+T}(m^*_{t+T},b^*_{t+T})}{\beta E\left[(1+r_T)(1+i_{T-1})-\delta_T\right]V'_{b;T}(m^*_T,b^*_T)} \Rightarrow$$

$$\beta E\left[(1+r_T)(1+i_{T-1})-\delta_T\right]V'_{b;T}(m^*_T,b^*_T)\lim_{t\to\infty} d_t^b = \lim_{t\to\infty}\beta E\left[(1+r_{t+T})(1+i_{t+T-1})-\delta_{t+T}\right]V'_{b;t+T}(m^*_{t+T},b^*_{t+T})$$

$$\Rightarrow \beta E\left[(1+r_T)(1+i_{T-1})-\delta_T\right]V'_{b;T}(m^*_T,b^*_T)\bar{d}_b = \lim_{t\to\infty}\beta E\left[(1+r_{t+T})(1+i_{t+T-1})-\delta_{t+T}\right]V'_{b;t+T}(m^*_{t+T},b^*_{t+T})$$

اگر $\bar{z}_b$ برابر $\beta E\left[(1+r_T)(1+i_{T-1})-\delta_T\right]V'_{b;T}(m^*_T,b^*_T)\bar{d}_b = \bar{z}_b$ تعریف‌شود آنگاه:

$$\lim_{t\to\infty}\beta E\left[(1+r_t)(1+i_{t-1})-\delta_t\right]V'_{b;t}(m^*_t,b^*_t) = \bar{z}_b$$

با انجام عملیاتی مشابه بر روی دنباله d_t^m چنین به دست می‌آید:

$$\lim_{t\to\infty}\left[\beta E(1+r_t)V'_{m;t}(m^*_t,b^*_t)\right] = \bar{z}_m$$

بدین ترتیب لم اثبات می‌شود.

حال با درنظر گرفتن لم فوق و فرض اینکه $\beta(1+r) > 1$ و استوکاستیک بودن و مثبت بودن دنباله درآمد، اثبات می‌شود که مصرف در این حالت به سمت بی‌نهایت میل خواهد نمود.اگر در حالت حدی با احتمال یک داشته باشیم: $\lim_{t\to\infty} V'(m^*_t,b^*_t) = 0$، در این صورت با استفاده از رابطه بنونایس-شینکمن ($V'(m^*_t,b^*_t) = u'(c^*_t)$) با احتمال یک خواهیم داشت: $\lim_{t\to\infty} u'(c^*_t) = 0$. به دلیل کاهنده بودن تابع مطلوبیت نهایی (و در واقع فرض تقعر تابع مطلوبیت)، با احتمال یک خواهیم داشت: $\lim_{t\to\infty} c^*_t = 0$. بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود ■

۴-۵. رابطه دارایی و مصرف

لم: به ازای هر عدد بزرگ $M > 0$ یک عدد بزرگ $N > 0$ وجود دارد به قسمی که اگر $m^*_t + b^*_t \ge N$ آنگاه $c^*_t \ge M$.

اثبات: از آنجا که تابع بلمن کران‌دار است: $0 \le V_t(m^*_t,b^*_t) < K$، بنابراین فرض تقعر V_t متضمن آن است که:

$$(m^*_t + b^*_t)V_t'(m^*_t,b^*_t) \le V_t(m^*_t,b^*_t) - V_t(0) \le K \tag{۳۷}$$

رابطه دو عدد بزرگ M, N چنین تعریف می‌شود: $N = \frac{K}{u'(M)}$. در این صورت اگر $m^*_t + b^*_t \ge N$، با استفاده از فرمول بنونایس- شینکمن می‌توان نوشت:

$$u'(c^*_t) \le V_t'(m^*_t,b^*_t) \le V_t'(N) \le \frac{K}{N}u'(M) \Rightarrow u'(c^*_t) \le u'(M) \tag{۳۸}$$

تقعر تابع مطلوبیت تضمین می‌نماید که: $c_t^* \geq M$. بدین ترتیب اثبات لم کامل می‌شود■.

منابع

- Aiyagari, S. R. (1994). Uninsured Idiosyncratic Risk and Aggregate Saving. *The Quarterly Journal of Economics*, 109(3), 659-684.
- Athreya, K. & Lahiri, S.N. (2006). *Measure Theory and Probability Theory*. Springer.
- Bailey, M.J. (1956). The Welfare Cost of Inflationary Finance. *Journal of Political Economy*, 64(2), 93-110.
- Bewley, T. (1980). The Optimum Quantity of Money. in Karekan, J. & Wallace, N. (1980). *Models of Monetary Economics*. Minneapolis, Minnesota. Federal Reserve Bank, 169-210.
- Bewley, T. (1983). A Difficulty with the Optimum Quantity of Money. *Econometrica*, 51(5), 1485-1504.
- Blackwell, D. (1965). Discounted Dynamic Programming. *Annals of Mathematical Statistics*, 36, 226-235
- Cagan, P. (1958). The Demand for Currency Relative to the Total Money Supply. *Journal of Political Economy*, 66(4), 303-328.
- Cesarano, F. (1998). Providing for the Optimum Quantity of Money. *Journal of Economic Studies*, 25(6), 441-449.
- Chamberlain, G., & Wilson, C. (2000). Optimal Intertemporal Consumption Under Uncertainty. *Review of Economic Dynamics*, 3(3), 365–395.
- Davoudi, P. & Hadian, M. (2011). Money Interast Rate and Financial Crisis. *Journal of Economics and Modelling*, 2 (5-6), 39-68 (In Persian).
- Debreu, G. (1959). *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*. Yale University Press. New Haven.
- Friedman, M. (1969). The Optimum Quantity of Money. in Friedman, M. (1969). *The Optimum Quantity of Money and Other Essays*. Chicago. Aldine, 1-50.
- Friedman, M. (1953). The Methodology of Positive Economics. in Friedman, M. (1953). *Essays in Positive Economics*. Chicago. Chicago University Press.
- Frisch, R. (1959). A Complete Scheme for Computing all Direct and Cross Demand Elasticities in a Model with Many Sectors. *Econometrica*, 27, 177–196
- Gong, G. & Semmler, W. (2004). *Stochastic Dynamic Macroeconomics: Theory, Numerics and Empirical Evidence*.
- Grandmont, J.M. & Laroque G. (1973). Money in the Pure Consumption Loan Model. *Journal of Economic Theory*, 6, 382-95
- Hellwig, M. F. (1993). The Challenge of Monetary Theory. *European Economic Review*, 37(2-3), 215-242.

- Hildenbrand, W. (1974). *Core and Equilibria of a Large Economy*. Princeton. Princeton Univercity Press.
- Huggett, M. (1993). The Risk Free Rate in Heterogeneous-Agent, Incomplete-Insurance Economies. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 17(5-6), 953–969.
- Imrohoroglu, A. (1992). The Welfare Cost of Inflation Under Imperfect Insurance. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 16(1), 79–92.
- Ireland, P.N. (2003). Implementing the Friedman Rule. *Review of Economic Dynamics*, 6, 120–134.
- Kocherlakota, N. & Cole, H.L. (1998). Zero Nominal Interest Rates: Why They're Good and How to Get Them. *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*, 22(2), 2–10.
- Krusell, P. & Smith, A. (1998). Income and Wealth Heterogeneity in the Macroeconomy. *Journal of Political Economy*, 106(5), 867–896.
- Lucas Jr., R.E. and Prescott, E.C. & Stokey N. (1989). *Recursive Methods in Economic Dynamics*. Cambridge. Harvard University Press.
- Mehra, R. & Prescott, E.C. (1985). The Equity Premium: A Puzzle. *Journal of Monetary Economics*, 15, 145-162.
- Meyer, P. A. (1966). *Probability and Potentials*. Waltham. Blaisdell.
- Samuelson, P.A. (1963). D. H. Robertson (l890-1963). *Quarterly Journal of Economics*, 77, 517-36.
- Samuelson, P.A. (1968). What Classical and Neoclassical Monetary Theory Really Was. *Canadian Journal of Economics*, 1, 1-15.
- Samuelson, P.A. (1969). Nonoptimality of Money Holding under Laissez Faire. *Canadian Journal of Economics*, 2, 303-8.
- Sargent, T.J. & Ljungqvist, L. (2013). *Recursive Macroeconomic Theory* (Third Ed.). MIT Press.
- Tobin, J. (1965). Money and Economic Growth. *Econometrica*, 33(4), 671-68.
- Townsend, R.M. (1980). Models of Money with Spatially Separated Agents. in Karekan, J. & Wallace, N. (1980). *Models of Monetary Economics*. Minneapolis, Minnesota. Federal Reserve Bank, 65–303.
- Woodford, M. (1990). The Optimum Quantity of Money. in Friedman, B.M. and Hahn, F.H. (1990). *Handbook of Monetary Economics*, 2, New York. North-Holland.